



**Правительство Российской Федерации**

**Государственный университет –  
Высшая школа экономики**

Факультет Менеджмента

Программа дисциплины

**«Теория вероятности и математическая статистика – 2»**

Направление 080500.62 – Менеджмент  
подготовка бакалавра;  
профиль специальных дисциплин «Логистика и управление цепями  
поставок»

Автор к.ф.-м.н., доцент Дружининская И.М.

Рекомендовано секцией УМС  
«Математические и статистические  
методы в экономике»  
Председатель А.С. Шведов

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2008 г.

Одобрено на заседании кафедры  
Высшей математики  
Зав. кафедрой А.А. Макаров

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2008 г.

Утверждена УС факультета

\_\_\_\_\_  
Ученый секретарь

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2008 г.

**Москва**



Программа представлена доцентом кафедры Высшей математики, к.ф.-м.н.  
Дружининской И.М.

**Требования к студентам:** Учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика - 2» (1-й и 2-й модули второго курса) использует материал предшествующих ей дисциплин «Высшая математика» (1-й — 3-й модули первого курса) и «Теория вероятностей и математической статистики - 1» (4-й — 5-й модули первого курса).

**Аннотация:** Данная дисциплина содержит математические основы и математические методы, формирующие у студентов специальную профессиональную культуру и специальное вероятностно-статистическое мышление, необходимое для успешной исследовательской и аналитической работы в современных областях социально-экономического и управленческого анализа. Задачей курса является введение студентов в методологию, подходы, математические методы анализа явлений и процессов в условиях неопределенности. Курс имеет прикладную направленность, что реализуется через рассмотрение (на лекциях и на семинарах) конкретных математических и прикладных моделей анализа (case-studies), иллюстрирующих и дополняющих теоретическое содержание программы дисциплины. Полная обеспеченность курса учебными пособиями позволяет стимулировать самостоятельную работу студентов, существенно увеличивая, тем самым, реальный охват рассматриваемой проблематики. Лекции и семинары дополнены проведением контрольных мероприятий (домашние задания и контрольные работы).

**Учебная задача курса:** Программа курса ориентирована на приобретение студентами навыков вероятностно-статистического подхода к решению проблем социально-экономической направленности. Материал курса предназначен для дальнейшего использования, прежде всего, в прикладном математическом моделировании, в анализе данных, в дисциплинах, посвященных построению и оцениванию современных экономических, социальных, политических, управленческих, правовых моделей, методик, технологий. В частности, этот курс используется в дисциплинах «Анализ данных в логистике», «Разработка управленческих решений», «Управление рисками», «Экономико-математические методы и модели в логистике», «Математические модели в теории управления и исследовании операций» и др.



## Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы		Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	
<b>1.</b>	<b>Теория вероятностей</b>	22	8	4	10
1.1	Случайные величины и их характеристики в задачах менеджмента и логистики (модуль 1)	9	3	2	4
1.2	Многомерная случайная величина. Линейный коэффициент корреляции. (модуль 1)	13	5	2	6
<b>2.</b>	<b>Элементы математической статистики</b>	86	32	12	42
2.1	Основы выборочного метода (модуль 1)	14	6	2	6
2.2	Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности (модули 1 и 2)	30	12	4	14
2.3	Проверка статистических гипотез (модуль 2)	20	7	3	10
2.4	Тема 2.4. Зависимость и независимость признаков (модуль 2)	22	7	3	12
	<b>Итого:</b>	108	40	16	52



## Формы контроля. Формирование итоговой оценки

По курсу предусмотрены одна контрольная работа и одно домашнее задание как формы промежуточного контроля. В конце второго модуля второго курса проводится письменный зачет (итоговая контрольная работа) по всему пройденному материалу. Промежуточная контрольная работа проводится в конце первого модуля. Домашнее задание выполняется во втором модуле. Образцы задач промежуточной контрольной работы, домашнего задания и итоговой контрольной работы приведены в данной программе после списка литературы.

Каждая форма контроля оценивается в десятибалльной шкале. Итоговая оценка  $Z$  складывается из оценки  $K_1$  за текущую успеваемость, из оценки  $K_2$  за промежуточную контрольную работу, из оценки  $K_3$  за домашнее задание, из оценки  $K_4$  за итоговую контрольную работу. Итоговая оценка вычисляется как средневзвешенная, в которой учтены четыре указанных слагаемых (текущая успеваемость, промежуточная контрольная работа, домашнее задание, итоговая контрольная работа), по формуле:  $Z = 0.1 \cdot K_1 + 0.2 \cdot K_2 + 0.1 \cdot K_3 + 0.6 \cdot K_4$ . Результат округляется по обычным математическим правилам до целых единиц.

Домашнее задание обязательно должно сдаваться не позднее срока, установленного преподавателем.

Итоговая оценка выставляется в десятибалльной и пятибалльной шкалах в ведомость и зачетную книжку студента. Перевод в пятибалльную систему из десятибалльной системы осуществляется согласно следующему правилу:

- $0 \leq Z < 4$  неудовлетворительно,
- $4 \leq Z < 6$  удовлетворительно,
- $6 \leq Z < 8$  хорошо,
- $8 \leq Z \leq 10$  отлично.

### **Пояснения:**

1. Оценка  $K_1$  за текущую успеваемость складывается из нескольких составляющих:
  - Контроль посещения лекций.
  - Оценки за микро-контрольные работы, проводимые во время лекций.
  - Решение студентом задач у доски во время семинаров.
  - Оценки за микро-контрольные работы, проводимые во время семинаров.
2. Промежуточная контрольная работа проводится письменно в аудитории и рассчитана на 80 минут (образцы задач приведены в данной программе).
3. Домашнее задание заключается в самостоятельном решении студентом нескольких задач, которые выдает студенту преподаватель. Домашнее задание следует оформить печатным образом (образцы задач приведены в данной программе).
4. Итоговая контрольная работа проводится письменно в аудитории и рассчитана на время не более 140 минут (образцы задач приведены в данной программе).
5. На основании п.29 Положения об организации контроля знаний в Государственном университете - Высшей школе экономики (утверждено Приказом от 31.07.2009г. №31-04/814) "результатирующая оценка по дисциплине может быть выставлена только при условии получения студентом положительной оценки за промежуточный и/или итоговый контроль...».

### **Базовые учебники**

1. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. — М.: ИНФРА-М, 1998. Или более новое издание: Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. — М.: ИД Форум, 2008.



2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001 (и более поздние издания).

## **Базовый задачник**

Ниворожкина Л.И. и др. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: Руководство для решения задач. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1999.

## **Содержание программы**

### **Раздел 1. Теория вероятностей**

#### **Тема 1.1. Случайные величины и их характеристики в задачах менеджмента и логистики (анализ и обобщение материала первого курса).**

Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин (законы Бернулли, Пуассона, равномерный, показательный, нормальный законы) в задачах менеджмента.

Применение нормального закона распределения в содержательных задачах экономико-социального характера. Распределения вероятностей, связанные с нормальным законом: распределения хи-квадрат, Стьюдента, Фишера - Снедекора.

Закон больших чисел и его следствие - теорема Бернулли. Центральная предельная теорема (в частности, интегральная теорема Муавра-Лапласа). Применение закона больших чисел и центральной предельной теоремы в прикладных задачах: контроль качества продукции, задачи массового обслуживания, задачи страхования, маркетинговые исследования.

#### **Материал по теме:**

Базовый учебник: Кремер Н.Ш.: §1.1 - §1.12, §2.1 - §2.4, §3.1 - §3.8, §4.1 - §4.7, §4.9; §6.1 - §6.5.

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §2.1-2.2; §3.1; §4.1 - §4.4; §5.1 - §5.2.

#### **Тема 2.1. Многомерная случайная величина. Линейный коэффициент корреляции.**

Многомерная случайная величина (случайный вектор). Закон распределения многомерной случайной величины. Функция распределения многомерной случайной величины. Двумерная нормальная случайная величина.

Линейный коэффициент корреляции как параметр, характеризующий тесноту линейной связи случайных величин. Уравнение линейной регрессии. Дисперсионная (ковариационная) и корреляционные матрицы.

#### **Материал по теме:**

Базовый учебник: Кремер Н.Ш.: §5.1 - §5.7;

Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.: §8.1 - §8.6

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §9.1-9.7; §9.9.



## Раздел 2. Элементы математической статистики

### Тема 2.1. Основы выборочного метода.

Задачи математической и прикладной статистики. Генеральная совокупность. Случайная выборка. Повторные и бесповторные выборки. Репрезентативность выборки. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения. Графическое изображение вариационного ряда: полигон, гистограмма, кумулята.

Характеристики центральной тенденции (среднее арифметическое, мода, медиана, среднее геометрическое). Показатели вариации ряда (размах, выборочная дисперсия, выборочное стандартное отклонение, коэффициент вариации). Закон корня квадратного для стандартной ошибки среднего.

#### Материал по теме:

Базовый учебник: Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.: §1.8

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §6.1-6.2.

### Тема 2.2. Точечные и интервальные оценки параметров генеральной совокупности.

Точечные оценки параметров генеральной совокупности. Требования, предъявляемые к точечным оценкам (несмещенность, эффективность, состоятельность, устойчивость). Метод наибольшего правдоподобия, метод наименьших квадратов и метод моментов как методы получения точечных оценок параметров генеральной совокупности. Наилучшие оценки математического ожидания, дисперсии, генеральной доли.

Понятие интервального оценивания параметров генеральной совокупности. Доверительная вероятность и предельная ошибка выборки (точность оценки). Идея построения доверительного интервала. Построение доверительных интервалов для математического ожидания, стандартного отклонения, вероятности биномиального закона распределения.

Интервальные оценки параметров нормально распределенной генеральной совокупности: среднего (при известной и неизвестной дисперсиях), стандартного отклонения, вероятности биномиального закона распределения или доли признака. Объем выборки, обеспечивающий заданную предельную ошибку выборки.

#### Материал по теме:

Базовый учебник: Кремер Н.Ш.: §9.1 - §9.7;

Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.: §4.3 - §4.6.

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §7.1-7.5.

### Тема 2.3. Проверка статистических гипотез.

Статистическая гипотеза. Основная (нулевая) и альтернативная (конкурирующая) гипотезы, параметрические и непараметрические гипотезы, простые и сложные гипотезы. Критерий. Ошибки первого и второго рода. Критическая область и область принятия



гипотезы. Двусторонние, правосторонние, левосторонние критические области.  
Процедура проверки параметрической гипотезы.

Проверка некоторых гипотез для нормально распределенных генеральных совокупностей: о числовом значении генерального среднего; о числовом значении генеральной дисперсии; о числовом значении генеральной доли (или о вероятности биномиального закона распределения), о равенстве генеральных средних, о равенстве генеральных долей.

Проверка биномиальных гипотез, критерий знаков.

### **Материал по теме:**

Базовый учебник: Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.: §3.1 - §3.6;

Кремер Н.Ш.: §10.1 - §10.8.

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §8.1.

## **Тема 2.4. Зависимость и независимость признаков.**

Шкалы измерений: количественная, порядковая, номинальная.

Связь признаков в количественных шкалах. Коэффициент корреляции Пирсона. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции Пирсона.

Связь признаков, измеренных в шкале порядков. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции Спирмена.

Связь номинальных признаков (таблицы сопряженности). Проверка гипотезы об отсутствии связи номинальных признаков на основе критерия хи-квадрат. Корреляция альтернативных признаков.

### **Материал по теме:**

Базовый учебник: Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.: §9.1 - §9.6;

Кремер Н.Ш.: §12.1 - §12.5; §12.8.

Базовый задачник: Ниворожкина Л.И. и др.: §9.1 - §9.7; §9.9.

## **Список литературы**

### **Основная литература по учебной дисциплине**

1. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. Серия "Учебники для ВУЗов". — СПб.: Лань, 1999.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для ВУЗов. — М.: Высшая школа, 1999.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для ВУЗов. — М.: Высшая школа, 1999.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. Учебник. — М.: Наука, 1988.
5. Горелова Г.В., Кацко И.А. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel. Учебное пособие для ВУЗов. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1999.



6. Колемаев В.А., Калинина В.Н., Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник, Серия «Высшее образование». — М.: ИНФРА-М, 1999.
7. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. — СПб.: Речь, 2007.
8. Ниворожкина Л.И., Морозова З.А. Математическая статистика с элементами теории вероятностей в задачах с решениями. Учебное пособие.- Москва – Ростов – на Дону: Март, 2005.
9. Сигел Э.Ф. Практическая бизнес-статистика. — Москва - СПб - Киев: Вильямс, 2002.
10. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии.- СПб.: Речь, 2007.
11. Томас Ричард. Количественный анализ хозяйственных операций и управленческих решений— М.: Дело и Сервис, 2003.

### Дополнительная литература по учебной дисциплине

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика в задачах и упражнениях. — М.: ЮНИТИ, 2001.
2. Аронович А.Б., Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Сборник задач по исследованию операций. — М.: Изд-во МГУ, 1997.
3. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика: Учебное пособие. — М.: Гардарики, 1998.
5. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. — М.: ИЛ, 1960.
6. Велько И.В., Свирид Г.П.. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи.- Минск: Новое знамя, 2004.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М.: Высшая школа, 2002.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. — М.: Высшая школа, 2002.
9. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталева Е.Ю. Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие. — М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1982.
11. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
12. Малхотра Н.К. Маркетинговые исследования. Практическое руководство. — М.: Вильямс, 2003.
13. Наследов А.Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. — СПб, Речь, 2008.
14. Очерки по истории математики / Под ред. Б.В.Гнеденко. — М.: Изд-во МГУ, 1997.
15. Плаус Скотт. Психология оценки и принятия решений. — М.: ИИД «Филинь», 1998.
16. Прикладной статистический анализ: Учебное пособие для ВУЗов / Колл. авт. Алексахин С.В., Балдин А.В. и др. — М.: «Издательство ПРИОР», 2001.
17. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
18. Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. — М.: Факториал, 1999.
19. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. 5-е издание. — М.: Агар, 2000.



## Литература для углубленного изучения научной области

1. Анастаси Анна, Урбина Сьюзан. Психологическое тестирование. 7-е международное издание. — СПб.: Питер, 2001.
2. Байе Майкл Р. Управленческая экономика и стратегия бизнеса. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.
3. Бендат Джулиус С., Пирсол Аллан Г. Прикладной анализ случайных данных. — М.: Мир, 1989.
4. Болч Б., Хуань К.Дж. Многомерные статистические методы для экономики. — М.: Статистика, 1979.
5. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.
6. Ван Гиг Дж. Прикладная общая теория систем. В 2-х кн. — М.: Мир, 1981.
7. Ватугин В.А. и др. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. - М.: Агар, 2003.
8. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров.— М.: Большая Российская энциклопедия, 1999.
9. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики: Учебник. — М.: Финансы и статистика, 1999.
10. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения.— М.: Советское радио, 1972.
11. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.
12. Количественные методы в экономических исследованиях. Под ред. М.В. Грачевой и др. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
13. Лунеев В.В. Юридическая статистика: Учебник. — М.: Юристь, 1999.
14. Льюс Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961.
15. Мангейм Дж.Б., Рич Р.К. Политология. Методы исследования. — М.: Весь Мир, 1999.
16. Мартин Н., Ингленд Дж. Математическая теория энтропии. — М.: Мир, 1988.
17. Математика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
18. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. — М.: Наука, 1971.
19. Нидерхоффер В. Университеты биржевого спекулянта. — М.: КРОН-ПРЕСС, 1998.
20. Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике. — М.: Финансы и статистика, 1982.
21. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами. Серия «Учебники для ВУЗов». — СПб.: Питер, 2001.
22. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. — М.: Воениздат, 1963.
23. Сачков Ю.В. Вероятностная революция в науке (Вероятность, случайность, независимость, иерархия). — М.: Научный мир, 1999.
24. Сно К.К. Управленческая экономика. — М.: ИНФРА-М, 2000.
25. Теория статистики с основами теории вероятностей: Учебное пособие для ВУЗов / Колл. авт. под ред. И.И. Елисейевой. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
26. Теория статистики. Классический университетский учебник. Под ред. проф. Громова Г.Л. — М.: ИНФА-М, 2005.
27. Трояновский В.М. Математическое моделирование в менеджменте. Учебное пособие. — М.: Русская деловая литература, 1999.
28. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики. — М.: Знание, 1978.



29. Фабоцци Фрэнк Дж. Управление инвестициями. Университетский учебник. — М.: ИНФРА-М, 2000.
30. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. — М.: Мир, 1984.
31. Франк Роберт Х. Микроэкономика и поведение. Университетский учебник. — М.: ИНФРА-М, 2000.
32. Холлендер М., Вулф Д.А. Непараметрические методы статистики. — М.: Финансы и статистика, 1983.
33. Чернов Г., Мозес Л. Элементарная теория статистических решений. — М.: Советское радио, 1962.
34. Черчилль Гильберт А. Маркетинговые исследования. - СПб.: Питер, 2002.
35. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции: Университетский учебник. — М.: ИНФРА-М, 1998.
36. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для студентов экономических специальностей. — М.: Изд-во ВШЭ, 1995.
37. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. Классический университетский учебник. - М.: Дело, 2004.
38. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
39. Hogg Robert V., Craig Allen T. Introduction Mathematical Statistics. 5 edition.- USA: Prentice-Hall, Inc., 1995.
40. Kadane Joseph B., et al. Rethinking the Foundations of Statistics. (Carnegie Mellon Univ.). — UK: Cambridge University Press, 2000.
41. Neter John, Wasserman William, Kutner Michael H. Applied Linear Statistical Models. 3edition. — USA:IRWIN, Inc., 1990.

## **Тематика заданий по различным формам текущего контроля**

### **1. Промежуточная контрольная работа:**

#### Возможные темы задач промежуточной контрольной работы:

- Задачи на использование центральной предельной теоремы, в том числе, на применение интегральной теоремы Муавра-Лапласа.
- Свойства коэффициента корреляции.
- Вычисление коэффициента корреляции Пирсона.
- Вычисление рангового коэффициента корреляции Спирмена.

#### *Образцы задач промежуточной контрольной работы:*

1. Вероятность того, что компакт-диски, подготовленные для записи информации, имеют дефекты, равна 0.01. Для записи взяты 1700 дисков. Найдите вероятность того, что менее 12 дисков будут бракованными.
2. Коэффициент корреляции между случайными величинами  $X$  и  $Y$  равен  $\rho_{XY} = -0.8$ . Найдите коэффициент корреляции  $\rho_{UV}$  между случайными величинами  $U = 2X - 1$  и  $V = -3Y + 2$ , а также дисперсию случайной величины  $Z = X + Y$ , если известно, что  $D(X) = 4, D(Y) = 9$ .



3. Для одной фирмы имеются данные по количеству сделок на продажу товара и затратам фирмы на мониторинг рынка (в тыс. долл.) в течение 5 месяцев:

Месяцы	1	2	3	4	5
Кол-во сделок	5	4	7	8	5
Затраты на мониторинг рынка	4	5	3	2	3

Нанесите на график эти значения. Вычислите коэффициент корреляции Пирсона для данных величин.

4. На фирму были приглашены эксперты для оценки качества работы семи сотрудников. Результаты экспертизы сведены в таблицу (оценки в 10-балльной системе):

Сотрудники	1	2	3	4	5	6	7
Эксперт 1	9	5	3	8	7	6	7
Эксперт 2	10	6	5	9	6	7	8

Определите, согласованы ли оценки экспертов (вычислите коэффициент корреляции Спирмена).

## 2. Домашнее задание:

### Возможные темы задач домашнего задания:

- Первичная обработка статистической информации.
- Вычисление коэффициентов корреляции.
- Проверка статистических параметрических и непараметрических гипотез.
- Вычисление доверительных интервалов для истинных значений параметров генеральной совокупности.

### *Образцы задач домашнего задания:*

1. Результаты наблюдений двух величин  $X, Y$  приведены в таблице

$X$	6	4	4	3	2	2	2	1
$Y$	2	3	3	4	7	8	9	10

Вычислите коэффициенты корреляции Пирсона и Спирмена, сравните их значения, сделайте выводы. Найдите доверительные интервалы для этих коэффициентов корреляции. Проверьте гипотезу о равенстве нулю вычисленных коэффициентов. Сравните результаты. Сделайте выводы.

2. За пятнадцать месяцев предприятие получало ежемесячную прибыль (в у.е.): 3; 5; 2; 3; 3; 5; 4; 6; 4; 6; 3; 5; 4; 6; 6. Найдите выборочное среднее и выборочное стандартное отклонение. Постройте эмпирическую функцию распределения прибыли (кумуляту). Найдите выборочную медиану.



3. Средняя зарплата по отрасли составляет 3 у.е. На основе опроса случайно выбранных работников данного предприятия в количестве 12 человек получена следующая информация о величине их зарплаты (в у.е.): 2.5; 2.9; 4.5; 3.9; 3.0; 2.9; 2.8; 2.2; 3.5; 2.9; 2.7; 3.3. Владелец предприятия утверждает, что его работники получают больше, чем в среднем по отрасли. На уровне значимости в 5% проверьте справедливость его утверждения.

4. Проверьте на уровне значимости 0.05, имеются ли расхождения во взглядах мужчин и женщин – владельцев автомобилей – на дополнительные устройства безопасности движения (в таблице указаны количества людей):

Покупатели	Дополнительные устройства		
	1	2	3
Мужчины	15	25	5
Женщины	5	15	20

1 - дисковые тормоза; 2 - складывающееся рулевое колесо; 3 – сигнал превышения скорости.

**3. Итоговая контрольная работа состоит из:**

**Первой части:** некоторого числа простых утверждений, для которых требуется выбрать правильный вариант утверждения.

**Второй части:** некоторого числа задач; возможные темы задач перечислены ниже:

- Получение точечных оценок параметров генеральной совокупности на основе небольшой выборки.
- Вычисление доверительных интервалов для истинных значений параметров нормально распределенной генеральной совокупности (математического ожидания, стандартного отклонения, генеральной доли).
- Определение необходимого объема случайной выборки из генеральной совокупности для достижения заданной предельной ошибки выборки.
- Проверка гипотез для нормально распределенных генеральных совокупностей: о числовом значении генерального среднего, о числовом значении генеральной дисперсии, о числовом значении генеральной доли, о равенстве генеральных средних, о равенстве генеральных долей.
- Критерий знаков.
- Связь номинальных признаков (таблицы сопряженности). Проверка гипотезы об отсутствии связи номинальных признаков на основе критерия хи-квадрат.

**Образцы задач итоговой контрольной работы:**

**Примеры из первой части:**

Выбрать верное утверждение:

1. Если  $X$  - случайная величина, то:  
 1)  $E(X + 2) = EX$  ; 2)  $E(X + 2) = EX + 2$  ; 3)  $E(X + 2) = EX - 2$  ; 4)  $E(X + 2) = 2EX$



2. Для любой случайной величины, определенной на всей числовой оси, справедливо соотношение:
- 1)  $DX > D(-X)$ ; 2)  $D(-X) = -DX$ ; 3)  $DX = D(-X)$ ; 4)  $DX < D(-X)$
3. Если математическое ожидание случайной величины  $X$  равно  $(-4)$ , то математическое ожидание случайной величины  $Y = 2X - 3$  равно:
- 1)  $-8$ ; 2)  $8$ ; 3)  $5$ ; 4)  $-11$
4. Если  $Y = 0.5X - 3$ , то  $\rho(X, Y)$  равно:
- 1)  $0.5$ ; 2)  $1$ ; 3)  $-3$ ; 4)  $-1$
5. Если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то коэффициент корреляции  $\rho(X, Y)$
- 1)  $\rho(X, Y) = 0$ ; 2)  $\rho(X, Y) = 1$ ; 3)  $\rho(X, Y) < 0$ ; 4)  $\rho(X, Y) > 0$
6. Точечная оценка  $\tilde{\theta}$  параметра  $\theta$  является несмещенной, если ее математическое ожидание  $E\tilde{\theta}$ :
- 1)  $E\tilde{\theta} < 0$ ; 2)  $E\tilde{\theta} = 0$ ; 3)  $E\tilde{\theta} > 0$ ; 4)  $E\tilde{\theta}$  не существует.

### **Примеры из второй части:**

1. Установлено, что промежутки между последовательными приходами клиентов в офис составили 40 мин., 30 мин., 20 мин., 25 мин. соответственно. Получив наилучшую точечную оценку параметра подходящего закона распределения, вычислите вероятность того, что за час в этот офис придет более двух человек. Вычислите вероятность того, что время между последовательными приходами в этот офис двух клиентов составит более 35 минут.
2. По исследованиям компании ЕВРОСЕТЬ среднее число проданных телефонов в первый день в каждом из офисов компании равнялось 15 (участвовали в опросе 10 торговых точек), а во второй день – 17 (участвовали 19 торговых точек). Найдите по этим данным наилучшую точечную оценку числа ежедневных продаж телефонов. Является ли эта оценка несмещенной и эффективной?
3. Аналитик рынка ценных бумаг оценивает среднюю доходность определенного вида акций. Случайная выборка из 16 дней показала, что средняя доходность по акциям данного типа составляет 8% с выборочным стандартным отклонением в 4%. Предполагая, что доходность акции подчиняется нормальному закону распределения, определите 99%-ый доверительный интервал для средней доходности интересующего аналитика вида акций.
4. С целью проверки достаточности количества посадочных мест в библиотеках Высшей школы экономики был проведен опрос 14 случайно выбранных студентов. Выяснили, сколько времени в течение прошедшей недели каждый выбранный студент провел в читальных залах библиотеки, готовясь к занятиям. По выборке оказалось: среднее время составляет 170 минут, а стандартное отклонение – 50 минут. Можно предположить, что время, проведенное студентом за неделю в библиотеке, подчиняется нормальному закону распределения. Определите доверительный интервал (с надежностью



95%) для среднего времени, проведенного в библиотеке в течение недели любым студентом ВШЭ.

5. Для тех же исходных данных с той же доверительной вероятностью найдите интервальную оценку для истинного стандартного отклонения времени, которое характеризует любого студента ВШЭ, посещающего читальные залы библиотеки ВШЭ.

6. Случайная выборка 345 людей, обратившихся в брачное агентство, показала, что 210 из них нашли себе пару с его помощью. Построить 95%-ый доверительный интервал для доли всех людей, обратившихся в это агентство и нашедших себе супруга с его помощью. Найдите минимальный объем выборки, при котором предельная ошибка выборки для доли всех людей, обратившихся в это агентство и нашедших супруга, не превысит 0.015.

7. Обычно применяемое лекарство снимает послеоперационные боли у 80% пациентов. Новое лекарство, применяемое для тех же целей, помогло 90 пациентам из первых 100 оперированных. Можно ли на уровне значимости 0.05 считать, что новое лекарство лучше?

8. Из 50 человек, покупающих в магазине кофе, 20 человек выбирают сорт «Арабика». Проверьте на уровне значимости 0.01 гипотезу о том, что половина покупателей выбирает данный сорт.

9. Один эксперт утверждает, что его прогнозы фактически всегда сбываются. Его коллеги провели эксперимент, который показал, что в семи случаях из десяти прогнозы этого эксперта сбылись. Проверьте на уровне значимости 0.05 основную гипотезу о том, что верных прогнозов у него столько же, сколько и неудачных.

10. Задана таблица сопряженности  $2 \times 2$

	1	2
1	10	15
2	12	16

При уровне значимости 0.05 проверьте гипотезу о независимости признаков.

*Дополнительная информация о задачах промежуточной контрольной работы, домашнего задания и итоговой контрольной работы может быть найдена на сайте кафедры Высшей математики под рубрикой:*

*Дружининская И.М. Курсы «Теория вероятностей и математическая статистика».*

### **Вопросы для оценки качества усвоения курса:**

1. Основные теоремы теории вероятностей.
2. Свойства функции распределения и плотности распределения.
3. Свойства математического ожидания, дисперсии, среднего квадратического отклонения.



4. Наиболее часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин: законы Бернулли и Пуассона.
5. Наиболее часто встречающиеся законы распределения непрерывных случайных величин: законы нормальный, показательный, равномерный.
6. Устойчивость нормального закона распределения.
7. Неравенство Чебышева.
8. Закон больших чисел и его следствия.
9. Сущность центральной предельной теоремы.
10. Теоремы Муавра-Лапласа как следствие центральной предельной теоремы.
11. Многомерные случайные величины; законы распределения многомерных случайных величин; свойства многомерной функции распределения.
12. Условное распределение случайной величины.
13. Зависимость и независимость случайных величин.
14. Стохастические зависимости двух случайных величин.
15. Ковариация и коэффициент корреляции. Их свойства.
16. Условные математические ожидания.
17. Уравнение регрессии.
18. Понятие случайной выборки и первичная обработка статистических данных: вариационные ряды, кумулята, гистограмма.
19. Получение точечных оценок для характеристики центральной тенденции распределения - среднего арифметического выборки, моды, медианы.
20. Характеристики изменчивости - выборочная дисперсия, выборочное стандартное отклонение, коэффициент вариации ряда.
21. Требования к точечным оценкам параметров генеральной совокупности (несмещенность, эффективность, состоятельность, устойчивость); выполнение этих свойств для известных точечных оценок основных параметров генеральной совокупности.
22. Методы получения доброкачественных точечных оценок параметров генеральной совокупности (метод наибольшего правдоподобия, метод наименьших квадратов, метод моментов).
23. Предельная ошибка выборки (точность оценки).
24. Идея, заложенная в методе получения доверительного интервала.
25. Интервальные оценки параметров нормально распределенной генеральной совокупности (среднего, стандартного отклонения, вероятности биномиального закона распределения).
26. Односторонние доверительные интервалы.
27. Определение объема выборки, обеспечивающей заданную предельную ошибку выборки.
28. Статистическая гипотеза.
29. Основная и альтернативная гипотезы.
30. Параметрические и непараметрические гипотезы, простые и сложные гипотезы.
31. Процедура проверки статистической гипотезы.



32. Критическая область гипотезы, уровень значимости.
33. Ошибки первого и второго рода.
34. Мощность критерия.
35. Проверка гипотезы о числовом значении генерального среднего.
36. Проверка гипотезы о числовом значении генеральной доли.
37. Проверка гипотезы о равенстве генеральных средних.
38. Проверка гипотезы о равенстве генеральных дисперсий.
39. Проверка гипотезы о равенстве долей признаков.
40. Проверка биномиальных гипотез.
41. Критерий знаков.
42. Количественная, порядковая, номинальная шкалы измерений.
44. Коэффициент корреляции Пирсона. Проверка гипотезы о значимости коэффициента корреляции Пирсона.
43. Ранговая корреляция. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена.
44. Таблицы сопряженности для изучения связи номинальных признаков.
46. Проверка гипотезы об отсутствии связи номинальных признаков на основе критерия хи-квадрат.
45. Корреляция альтернативных признаков (коэффициент контингенции).

*Автор программы*

*Дружининская И.М.*